Viéte-formulák

Avagy összefüggés a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között

Alapvetően tudjuk a másodfokú egyenlet normál alakját:

$$ax^2 + bx + c = 0, ahol\ a, b, c \in R\ és\ a \neq 0.$$

Valamint a megoldóképletét:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Most kössük össze a két összefüggést egy új módszerrel! Vegyük a két gyököt külön-külön!
Tehát: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $és$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Most adjuk össze a két kifejezést:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Közös nevezőre írással:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b) - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vegyük észre, hogy a két gyök alatti kifejezés azonos, de ellentétes előjelű, tehát kiejtik egymást; így a következő marad:
$x_1 + x_2 = \frac{-b+(-b)}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
Tehát az első Viéte-formula: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

A második menetben szorozzuk össze a két kifejezést:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vegyük észre, hogy a szorzat számlálója (a+b)*(a-b) alakú, így az eredmény: a^2-b^2 alakú lesz, vagyis:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

Hajtsuk végre a négyzetre emeléseket!

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\mathrm{b}^2 - (b^2 - 4ac)}{4\mathrm{a}^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Tehát a második Viéte-formula:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Gyakorló feladatok:

1.) *Egy másodfokú egyenlet gyökei 3 és 5. Mi az egyenlet?*

x_1=3 és x_2=5. A legegyszerűbb alakot úgy kapjuk, hogy a=1-et választjuk, mivel így nem lehet tovább egyszerűsíteni az egyenletet. Így a Viéte-formulák alapján:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} => 3 + 5 = -\frac{b}{1} => 8 = -b => b = -8$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} => 3 \cdot 5 = \frac{c}{1} => 15 = c => \text{Tehát: } c = 15$$

<u>Vagyis a másodfokú egyenlet: $x^2 + 8x + 15 = 0.$</u>

2.) *Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek gyökei -1 és +5, ha tudjuk, hogy a fő-együtthatója: 2?!*

Tudjuk, hogy: x_1=-1; x_2=5; a=2.

A Viéte-formulákat felírva:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} => -1 + 5 = -\frac{b}{2} => 4 = -\frac{b}{2} => 8 = -b => b = -8$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} => -1 \cdot 5 = \frac{c}{2} => -10 = c => c = -10$$

<u>Tehát a kért egyenlet: $2x^2 - 8c - 10 = 0.$</u>

3.) *Gondoltam két számot, melyek összege 9, szorzatuk pedig 18. Mi a két szám?*

A két száma legyen: x_1 és x_2.

Tudjuk, hogy: $x_1 + x_2 = 9$, valamint: $x_1 \cdot x_2 = 18$.

Használjuk a Viéte-formulákat, így: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, valamint $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Adjunk a-nak értéket, pl. a lehető legegyszerűbben a:=1.

Így a két egyenlet: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{1}$, valamint $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{1}$.

Tehát: $x_1 + x_2 = 9$ és $x_1 \cdot x_2 = 18$.

Az elsőből fejezzük ki x_2-t: $x_2 = 9 - x_1$.

Ezt helyettesítsük be a másik egyenletbe:

$x_1 \cdot (9 - x_1) = 18$

Végezzük el a beszorzást: $9x_1 - x_1^2 = 18$

Vigyünk át mindent a jobb oldalra és állítsuk őket sorba:

$x_1^2 - 9x_1 + 18 = 0.$

Ez pedig egy sima másodfokú egyenlet x1-re.

$$x_{1_{a,b}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} =$$

$$x_{1_{a,b}} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{9 + 3}{2} = \frac{12}{2} = 6, \text{illetve: } x_2 = \frac{9 - 3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

<u>Tehát a két gondolt szám: 3 és 6.</u>